Leçon 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

RM
2022-2023

On se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire.

1 Espace euclidien et adjoint d'un endomorphisme

1.1 Rappel sur les espaces vectoriel euclidien

Définition 1 : Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique $\langle .,. \rangle \in E \times E \to \mathbb{R}$ définie positive, c'est à dire que pour tout x de E, on a $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Définition 2 : Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz) 3 : Pour tout x, y de E, on a $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. On a égalité si et seulement si x et y sont liés.

Définition 4 : On dit que deux vecteurs x et y dans E sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. On appelle alors famille orthogonal dans E toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteur de E telle que $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tous $i \neq j$ dans I. Elle est orthonormal si de plus $\|e_i\| = 1$ pour tout i dans I.

Théorème (Pythagore) 5 : Les vecteurs x et y sont orthogonaux dans E si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Théorème (Orthonormalisation de Gram-Schmidt) 6 : A toute base de E on peut lui associer une base orthonormée.

Remarque 7 : Ce théorème est fondamentale car comme nous allons le voir plus tard, de nombreux endomorphisme se se traite très bien dans une base orthonormée.

Théorème (Projection orthogonale) 8 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour x dans E, il existe un unique vecteur y dans F tel que $\|x - y\| = d(x, F) = \inf\limits_{z\in F} \|x - z\|$ et est l'unique vecteur de F tel que $x - y \in F^\perp$. Son expression une base orthonormée $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de F est $y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

Corollaire 9 : Pour tout sous espace vectorielle F de E, on a $E = F \bigoplus F^\perp$.

1.2 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 10 : Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$ pour tout x, y dans E.
On dit que u^* est l'adjoint de u.

Théorème 11 : Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base E et $G = (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice du produit scalaire. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans $\mathcal{B}$, alors la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est $B = G^{-1}AG$. Dans le cas où la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $B = {}^tA$.

Théorème 12 : Pour tout endomorphisme u, v de $\mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
i) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.
ii) $(u^*)^* = u$.
iii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
iv) Si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.
v) $ker(u^*) = (Im(u))^\perp$ et $Im(u^*) = (ker(u))^\perp$.
vi) $rg(u) = rg(u^*)$.
vii) Si F est un s.e.v de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

2 Endomorphisme orthogonale

2.1 Propriétés des endomorphismes orthogonaux

Définition 13 : Une isométrie (ou application orthogonale) de E est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire, c'est-à-dire telle que $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, y de E. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Exemple 14 : • Les seules homothéties $x \mapsto \lambda x$ qui sont des isométries sont Id et $-Id$.
• Pour E de dimension 1, on a $\mathcal{O}(E) = \{-Id, Id\}$.

Théorème 15 : Une application $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si elle conserve la norme, ie $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Remarque 16 : La linéarité est importante. Par exemple, si $e \in E$ de norme 1, l'application $u : x \mapsto \|x\|e$ conserve la norme et n'est pas linéaire.

Théorème 17 : Une isométrie est un automorphisme de E et $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Théorème 18 : Soit u une isométrie de E. Si F est un s.e.v de E stable par u, alors son orthogonale $F^\perp$ est aussi stable par u.

Théorème 19 : Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est une isométrie si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

Théorème 20 : Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E et u dans $\mathcal{L}(E)$ de matrice A dans $\mathcal{B}$. L'application u est une isométrie si et seulement si on a ${}^tAA = A^tA = I_n$.

Définition 21 : On appelle matrice orthogonale, une matrice réelle A telle que ${}^tAA = A^tA = I_n$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Théorème 22 : • Pour toute matrice A dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A) = +_-1$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

• Pour toute isométrie $u \in \mathcal{O}(E)$, on a $\det(u) = +_-1$.

Définition 23 : On note $\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) | \det(u) = 1\}$ l'ensemble des isométries positives et $\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) | \det(u) = -1\}$ l'ensemble des isométries négatives.

Théorème 24 : Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$.

2.2 Réduction des endomorphismes orthogonaux

Lemme 25 : Les seules valeurs propres réelles possibles d'une isométrie sont -1 et 1.

Lemme 26 : Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe des sous-espaces vectoriels $P_1, ..., P_r$ de E de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $E = \bigoplus_{j=1}^r P_j$.

Théorème 27 : Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ avec $n \geq 2$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & R_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k \in [\![1\,;r]\!]$, on a noté $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\backslash\{\pi\}$ et p, q, r sont des entiers naturel tels que $p + q + 2r = n$.

2.3 Symétries orthogonales

Définition 28 : Si F est un sous-espace vectoriel de E, la symétrie orthogonale par rapport à F est l'application définie sur E par $\forall x \in E, s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$.

Remarque 29 : De $p_F + p_{F^\perp} = Id$, on en déduit que $s_F(x) = 2p_F(x) - x = x - 2p_{F^\perp}(x)$.

Exemple 30 : • Si $D = \mathbb{R}a$ est une droite vectorielle, on a alors $s_D(x) = 2p_D(x) - x = 2\frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2}a - x$.

• Si $H = D^\perp$ est un hyperplan, on a alors $s_H(x) = x - 2p_D(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2}a$.

Définition 31 : On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan et demi-tour ou retournement une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Théorème 32 : s_F est auto-adjoint et est une isométrie.

Théorème 33 : Pour $n = dim(E) \geq 2$, le groupe $\mathcal{O}(E)$ est engendré par l'ensemble des réflexions. Précisément, toute isométrie de E peut s'écrire comme le produit d'au plus n réflexions.

3 Endomorphismes symétriques

3.1 Définitions

Définition 34 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$, ce qui revient à dire que $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.
On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tA = A\}$ l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques d'ordre n.

Exemple 35 : L'application p_F est autoadjoint.

Théorème 36 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Corollaire 37 : $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 38 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique positif (défini positif) s'il est symétrique avec $\langle x, u(x)\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ ($\langle x, u(x)\rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$). On note alors $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$.
On a la même définition pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 39 : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ($u \in \mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (strictement positives).

3.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Lemme 40 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Lemme 41 : On suppose $n \geq 2$. Si λ, μ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{S}(E)$, alors les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Théorème (Spectral) 42 : • Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

• Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, ie il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

3.3 Applications du théorème spectral

Développement 43 : L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. **Dev 1**

Théorème 44 : Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe alors une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Théorème (Décomposition polaire) 45 : L'application $\mu : (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto OS \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Application 46 : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Développement 47 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est égale à la boule unité $B(0,1)$, définie par $B(0,1) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |||A|||_2 \leq 1\}$ **Dev 2**

Lemme 48 : Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a alors $\|A\| = \rho(A)$.

4 Endomorphismes normaux

Définition 49 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dir normal s'il est tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemple 50 : Les endomorphismes symétriques et orthogonales sont normaux.

Proposition 51 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Lemme 52 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Lemme 53 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe des sous-espaces vectoriels de E, $P_1, ..., P_r$ de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $E = \bigoplus_{j=1}^r P_j$.

Lemme 54 : Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension 2. Si u a une valeur propre réelle, il est alors diagonalisable dans une base orthonormée. Sinon, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Théorème 55 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$\Delta = \begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où D_p est une matrice diagonale d'ordre p et $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ pour $k \in [\![1\,;r]\!]$ avec $a_k \neq 0$ et p, r sont des entiers naturels tels que $p + 2r = n$.

Références :

1. Algèbre et géométrie Rombaldi
2. Algèbre linéaire Grifone
3. Algèbre Gourdon
4. isenmann (rip)